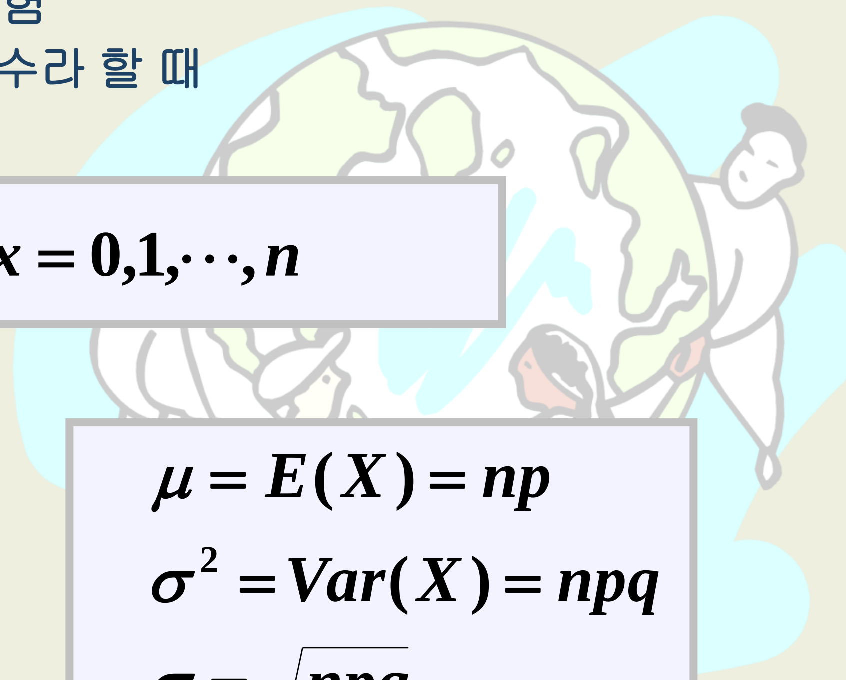
제 6장

확률분포

고려대학교 경영대학 박 광태

이산확률분포

- 이항분포
  - 매 시행마다 성공의 확률(p)이 일정한 베르누이 시행을 n번 독립적으로 시행하여 얻은 분포
  - 베르누이 시행이란 단 한번 시행되어 두 가지 가능한 결과, 즉 성공과 실패중의 하나만을 제공하는 실험
  - X를 n번 시행 중에 얻은 성공회수라 할 때



$$p(X = x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n$$

여기서

$${}_nC_x = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma^2 = Var(X) = npq$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

이산확률분포

- 예제 6-4

과거의 자료에 따르면 어떤 특정한 지질구조를 갖는 지역을 개발하면 온천수가 발견될 확률이 대략 30%로 알려져 있다. 조양회사는 온천개발을 위해 이러한 지질구조를 갖는 5개 지역을 선정하였다. 이 지역들은 서로 멀리 떨어져 있기 때문에 온천이 나올 가능성에 관해서는 상호독립이라고 할 수 있다. 선정된 지역을 개발했을 때 실제로 온천이 나오는 지역의 수를 X라고 할 때, 변수 X의 확률분포를 구하고 기대값과 분산을 계산하시오.

이산확률분포

이산확률분포

- 초기하분포
  - 항목크기가 N인 유한모집단으로부터 비복원으로 표본크기 n 의 표본을 추출할 때 얻는 분포
  - X 를 표본에서의 성공회수라 할 때

$$p(X=x)=\frac{{}_{N_1}C_x \bullet {}_{N_2}C_{n-x}}{{}_{N}C_n},\ x=0,1,\cdots,\min(n,N_1)$$

여기서

N	:모집단의 크기
N_1	:모집단에서 성공의 수
$N_2=N-N_1$	:모집단에서 실패의 수
n	: (복원없이 선택된) 표본의 크기

이산확률분포

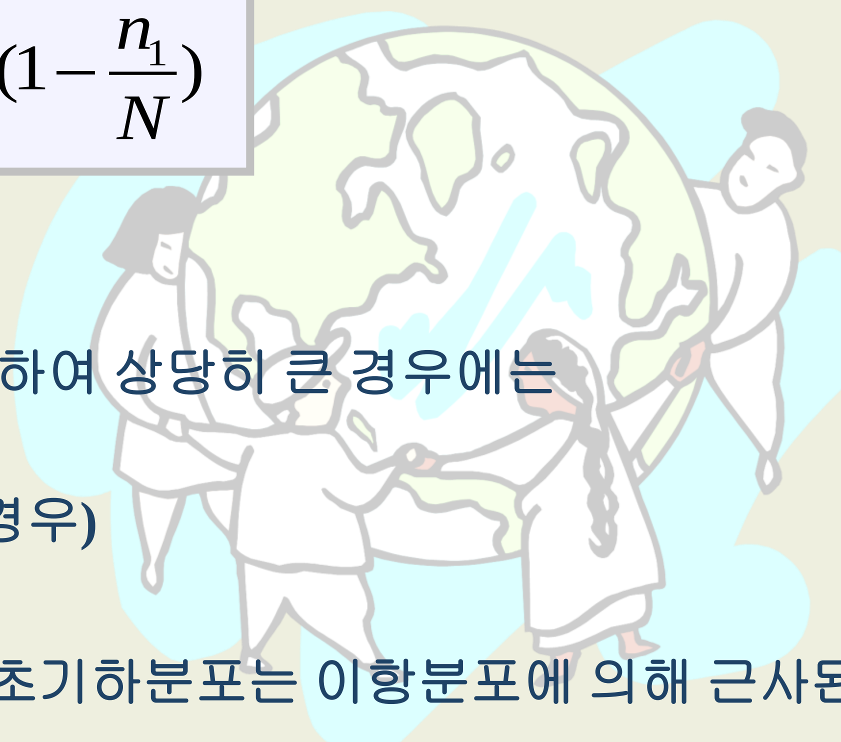
$$E(X) = n(\frac{N_1}{N})$$

$$Var(X) = (\frac{N-n}{N-1})n(\frac{N_1}{N})(1-\frac{n_1}{N})$$

◆수정계수 = $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, N이 n에 비하여 상당히 큰 경우에는

(보통 $\frac{n}{N} \leq 0.05$인 경우)

수정계수의 값이 1에 가까우므로 초기하분포는 이항분포에 의해 근사된다.

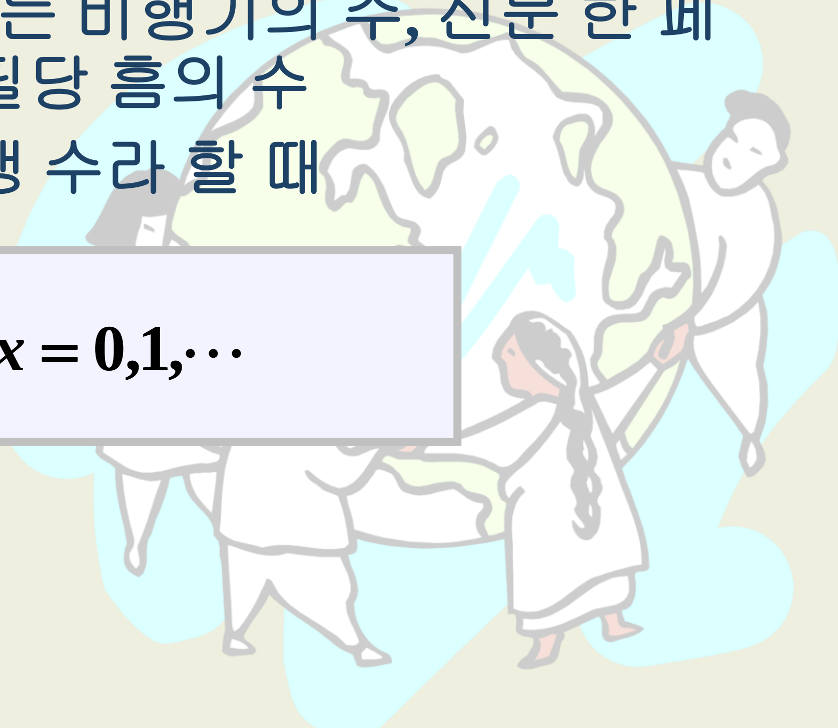


이산확률분포

- 포아송분포
  - 특정한 시간이나 공간에서의 사건 발생 수와 관련
  - 예)주어진 시간동안 교환대에 걸려오는 전화의 수, 한 시간 동안 공항에 도착하는 비행기의 수, 신문 한 페이지당 오자의 수, 천 한필당 흠의 수
  - X를 단위시간당 사건발생 수라 할 때

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0,1,\cdots$$

$$E(x) = \lambda$$
$$Var(x) = \lambda$$



연속확률분포

- 균등분포

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

연속확률분포

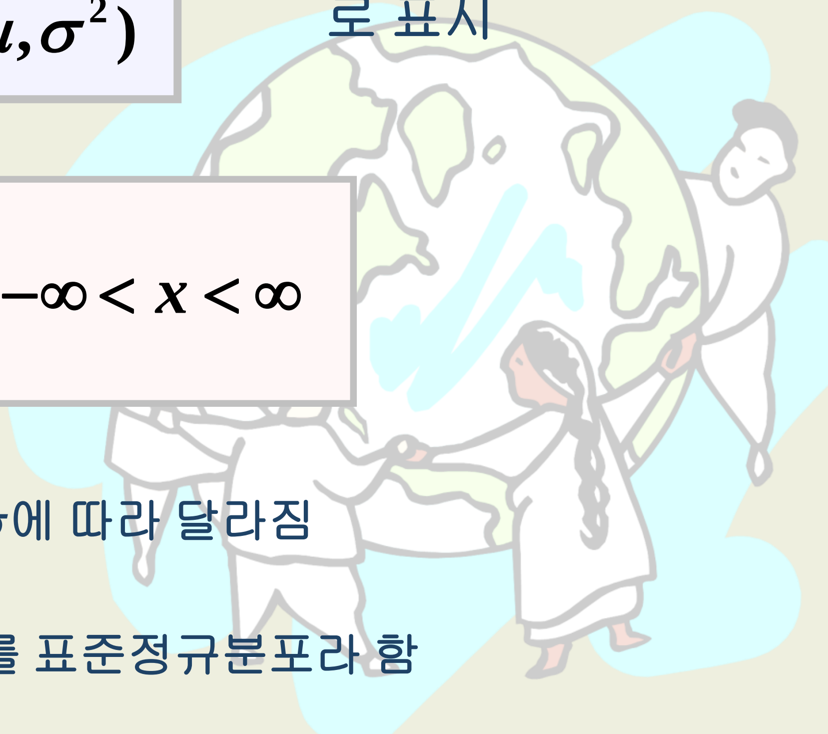
정규분포

- 평균이 μ 이고, 분산이 σ^2인 일반적인 정규분포는

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

로 표시

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, -\infty < x < \infty$$



- 정규분포의 모양과 위치는 μ와 σ에 따라 달라짐
- $\mu = 0$이고 $\sigma^2 = 1$ 인 정규분포를 표준정규분포라 함

연속확률분포

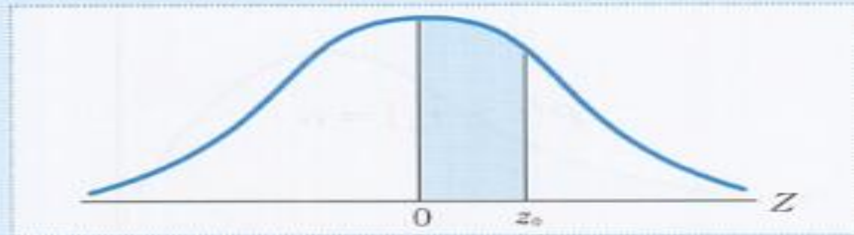
- 표준화 변환

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$g(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

$$P(0 \le Z \le z_0) = \int_0^{z_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

연속확률분포

예제 6-15

TOEFL 성적을 나타내는 확률변수 X가 평균이 480이고 분산이 900인 정규분포를 따른다고 하자. 한 학생의 TOEFL 성적이 $X_1 = 500$과 $X_2 = 520$ 사이일 확률 즉, $P(500 \le X \le 520)$를 구하시오.

연속확률분포

- 예제 6-15(계속)

연속확률분포

- 예제 6-15(계속)

연속확률분포

- 예제 6-15(계속)

연속확률분포

- 이항분포에 대한 정규근사
  - $np \geq 5$ 이고, $nq \geq 5$ $(q = 1 - p)$ 일 때

이항분포는 평균 $\mu = np$ 이고, $\sigma^2 = npq$ 인 정규분포에 근사한다.

$$\boxed{B(n, p) \Rightarrow N(np, npq)}$$

연속확률분포

예제 6-17

어떤 공급업자로부터 개인용 컴퓨터를 구입한 사람 중 약 60%는 외장 하드드라이브도 함께 주문한다. 이제 80명의 개인용 컴퓨터 구입자 가운데 외장 하드드라이브를 주문하는 사람이 50명을 초과할 확률을 구하시오.

연속확률분포

- 예제 6-17(계속)