Runge-Kutta system

일차 미분방정식으로 연립되어 있는 초기값 문제의 근사해를 구하기 위한 수치적인 방법을 설명한다. 간편성을 위해서 다음과 같은 2개의 일차 미분방정식과 초기 조건을 고려하자.

$$x' = f(t, x, y), \; y' = g(t, x, y), \; x(t_0) = x_0, \; y(t_0) = y_0.$$

점 $t_i = t_0 + ih, \; i = 1, 2, \cdots, N$ 에서 방정식의 정확한 해 $x = \phi(t)$ 와 $y = \psi(t)$ 의 근사값 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 와 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 를 결정하고자 한다. 벡터 형태의 초기값 문제를 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

여기서 $\mathbf{x} = (x, y), \mathbf{f} = (f, g),$ 그리고 $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ 이다. 예를 들어 Euler 방법은 $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + h\mathbf{f}_i$ 와 같이 적용할 수 있고 성분 형태로는 다음과 같이 쓰인다.

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_i, x_i, y_i) \\ g(t_i, x_i, y_i) \end{pmatrix}$$

예제

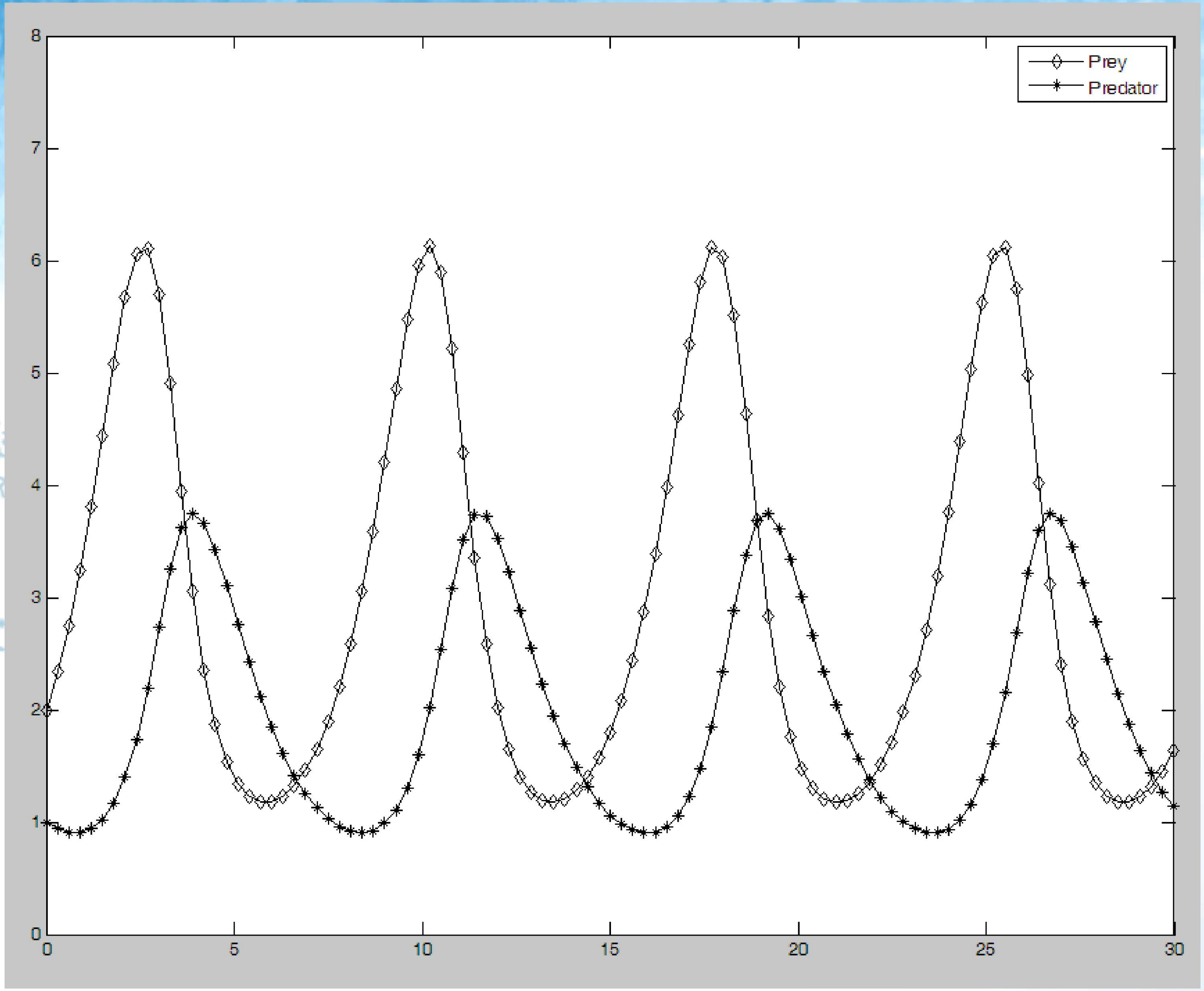
$x_0 = 2$ 와 $y_0 = 1$ 이 주어졌을 때, $0 \le t \le 30$ 에서 다음과 같은 Predator-Prey 방정식의 해를 구해보자.
$N = 100$ 이다.

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) = x(1 - 0.5y), \\ y' &= g(x, y) = y(-0.75 + 0.25x). \end{aligned}$$

```
clear; clf; N=100; T=30; t0=0; t=linspace(t0,T,N+1); h=t(2)-t(1);
x=zeros(N+1,1); y=zeros(N+1,1); x(1)=2; y(1)=1;
f=inline('x*(1.0-0.5*y)','t','x','y');
g=inline('y*(-0.75+0.25*x)','t','x','y');

for i=1:N
    k11=f(t(i),x(i),y(i));
    k12=g(t(i),x(i),y(i));
    k21=f(t(i)+0.5*h,x(i)+0.5*h*k11,y(i)+0.5*h*k12);
    k22=g(t(i)+0.5*h,x(i)+0.5*h*k11,y(i)+0.5*h*k12);
    k31=f(t(i)+0.5*h,x(i)+0.5*h*k21,y(i)+0.5*h*k22);
    k32=g(t(i)+0.5*h,x(i)+0.5*h*k21,y(i)+0.5*h*k22);
    k41=f(t(i)+h,x(i)+h*k31,y(i)+h*k32);
    k42=g(t(i)+h,x(i)+h*k31,y(i)+h*k32);
    x(i+1) = x(i)+h/6*(k11+2*k21+2*k31+k41);
    y(i+1) = y(i)+h/6*(k12+2*k22+2*k32+k42);
End

plot(t,x,'kd-',t,y,'k*-'); axis([0 30 0 8]); legend('Prey','Predator')
```


Prey
Predator
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
5
10
15
20
25
30