Euler' s method

상미분 방정식 (ordinary differential equation)의 초기값 문제와 경계값 문제에 대해서 다루어 보자.

미분방정식의 수치해법 중 초기값을 이용하는 방법 중 Euler, 향상된 Euler, 중간점 방법, Runge-Kutta 방법에 대해 알아보고, 이를 이용하여 연립방정식과 고차 방정식의 해를 찾아본다.
Euler 방법은 다음과 같은 초기값 문제의 근사값를 찾는다.

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

방정식을 푸는 수치방법은 이산집합의 마디점

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

에서 근사해 $y(t_i)$를 계산하는 것이다. 단순성을 위하여 등간격 마디를 사용한다.

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

점들 사이의 거리는 $h = (T - t_0)/N$ 이며, 이를 단계크기 (step size)라 한다. Taylor 정리를 사용하여 함수 $y(t)$ 를 t_i 에서 테일러 일차 다항식까지 전개한 다음 t 에 t_{i+1} 를 대입하면 다음과 같다.

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

여기서 $t_i \le \xi_i \le t_{i+1}$ 이다.

Euler 방법은 위 식에서 오차항 $(\frac{h^2}{2}y''(\xi_i))$ 을 고려하지 않고, 각각의 $i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ 에 대해 $y(t_i)$ 에 대한 근사해를 구하는 방법이다.

$$(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)).$$

Euler 방법을 이용하여 구간 $0 \leq t \leq 1$에서 다음과 같은 1계 방정식의 정확한 해의 근사값을 구하자.

$$y' = 1 - 2t + 5y, \quad y(0) = 2.$$

위의 방정식은 일차 선형 방정식이고, 초기값에 대한 정확한 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y(t) = \frac{53}{25}e^{5t} + \frac{2}{5}t - \frac{3}{25}.$$

다음은 Euler 방법을 이용하여 방정식의 수치해를 계산하는 코드이다. h=0.01를 사용한다.

```
clear; clf; N=100; t0=0; T=1; t=linspace(t0,T,N+1);
h=t(2)-t(1);
y(1)=2; f=inline('1-2*ft+5*fy','ft','fy');
for i=1:N
   y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
end
exa=53/25*exp(5*t)+2/5*t-3/25;  plot(t, y, 'ko', t, exa, 'k')
xlabel('t'); ylabel('y', 'rotation', 0)
legend('numerical solution', 'exact solution', 2)
```

방법을 이용하여 얻은 결과