



NCTM Process Analysis I (Connection & Representation)

Dr. Dong-Joong Kim
(dongjoongkim@korea.ac.kr)

What does it mean to “do” mathematics?

- ① Problem solving
- ② Reasoning and proof
- ③ Communication
- ④ Connections
- ⑤ Representation

Each group and its choice

- Group 1: Connection
- Group 2: Connection
- Group 3: Reasoning and proof
- Group 4: Representation
- Group 5: Connection
- Group 6: Problem solving
- Group 7: Connection
- Group 8: Representation
- Group 9: Representation
- Group 10: Problem solving

Principles and Standards for School Mathematics

Connections should be made in the mathematics classroom to help students

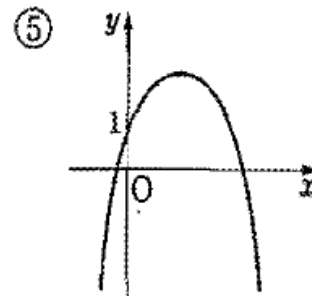
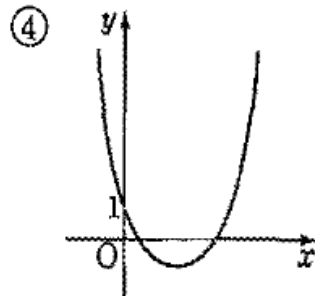
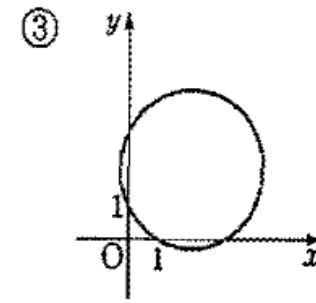
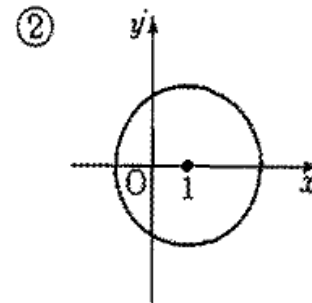
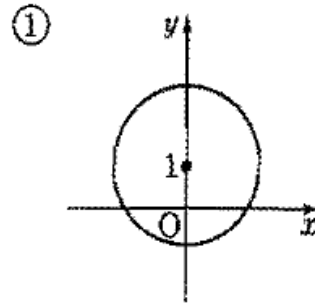
1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

실수 x, y 에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} x-2 & -y \\ y-2 & x+2 \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재

하지 않을 때, 좌표평면 위에서 점 (x, y) 가 나타내는 그래프의 개형은? (4점)

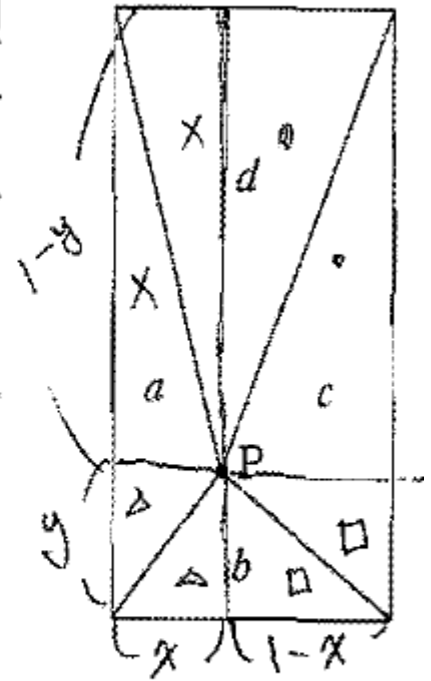
2조 문제



2조의 답은 1번

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

점 P가 가로 길이가 1, 세로의 길이가 2인
 직사각형의 내부에서 움직이고 있다. 그림과 같
 이 점 P와 각 꼭짓점을 연결하였을 때 생기는
 네 삼각형의 넓이를 a, b, c, d 라 하자.



2조 문제

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않도록 하
 는 점 P의 자취의 길이는? (3점)

- ① 1
- ② $\sqrt{2}$
- ③ 2
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ 3

2조의 답은 2번

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

5조 문제

직선 $y = -x + 2\sqrt{3}$ 에서 곡선

$$C : x = 2 \cos \theta, y = \sin 2\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

5조의 답은 1번

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

홍범준 외(2011). 썬 수학 2. 서울: 좋은책 신사고.

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x , y 에 대하여

5조 문제

$$f(x+y) = f(x) + g(4y)$$

를 만족시키고 $g'(0) = 2$ 일 때, $f'(5)$ 의 값을 구하여라.

5조의 답은 2번

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

홍범준 외(2011). 썬 수학 2. 서울: 좋은책 신사고.

5조 문제

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 P에서의 접선과 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=6$ 으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이의 최솟값을 구하여라.

5조의 답은 2번

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

홍범준 외(2011). 썬 수학 2. 서울: 좋은책 신사고.

7조 문제

이차함수 $y=x^2+2x+3$ 의 그래프는 포물선이다. 이 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하여라.

7조의 답은 2번

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

김수환 외 (2012). 기하와 벡터. 서울: 교학사.

그림과 같은 직육면체 $ABCD-EFGH$ 의 꼭짓점 D 에서 선분 EG 에 내린 수선의 발을 I 라 하자. $\overline{AB}=\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=3$ 일 때, 평면 DIG 와 평면 IEG 가 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여 $\cos\theta$ 의 값은?

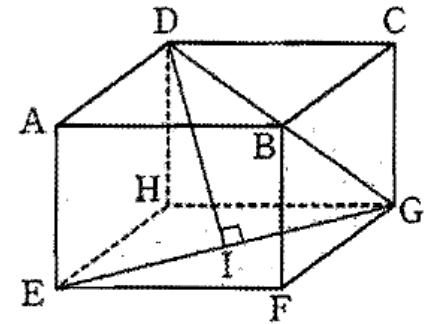
① $\frac{\sqrt{34}}{34}$

② $\frac{\sqrt{34}}{17}$

③ $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

④ $\frac{2\sqrt{34}}{17}$

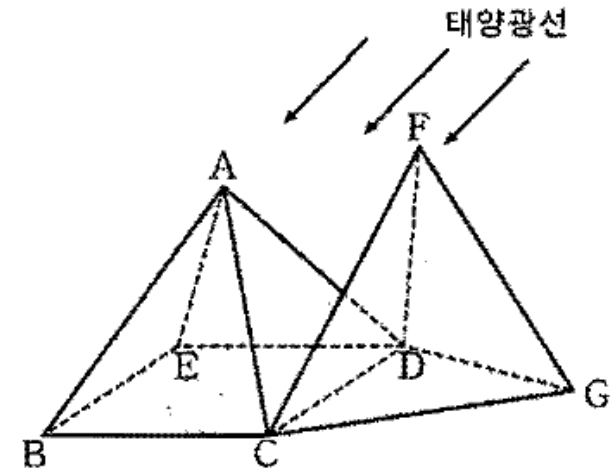
⑤ $\frac{5\sqrt{34}}{34}$



1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

김수환 외 (2012). 기하와 벡터 익힘책. 서울: 교학사.

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정사각뿔 모양의 나무토막 A-BCDE와 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 모양의 나무토막 FCGD가 모서리 CD를 공유하며 두 밑면이 같은 평면 위에 놓여 있다.



평면 ACD에 수직인 방향으로 태양광선이 비출 때, 나무토막의 한 면 ACD에 나타나는 나무토막 FCGD의 그림자의 넓이는?

- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- ⑤ $\frac{4}{3}$

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole
3. Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics

Principles and Standards for School Mathematics

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Connections should be made in the mathematics classroom to help students

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
(e.g., connecting ideas in algebra and geometry; new and old ideas)
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to **produce a coherent whole**
(e.g., the same mathematical structure in seemingly different settings)
3. Recognize and apply mathematics **in contexts outside of mathematics**
(e.g., other subjects areas and disciplines such as science, the social sciences, medicine, and commerce)

Principles and Standards for School Mathematics

Use of **representation** should enable students to

1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
2. Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems
3. Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

4조 문제

문제 포물선 $y^2=4px$ 와 포물선 $x^2=4py$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 이 성질과 포물선의 접선의 방정식(2)를 이용하여 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

4조의 답은 2번

1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
2. Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems
3. Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena

황석근 외(2010). 기하와 벡터. 서울: 교학사

4조 문제

01 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 과 직선 $y = -x + k$ 의 위치 관계를 실수 k 의 값 또는 범위에 따라 판정하여라.

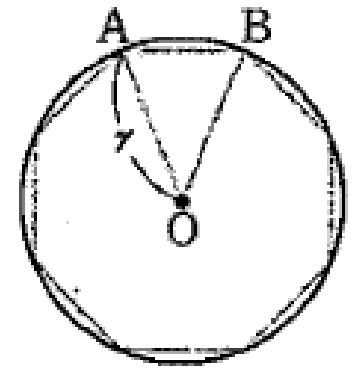
4조의 답은 2번

1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
2. Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems
3. Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena

황석근 외(2010). 기하와 벡터. 서울: 교학사

8조 문제

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원에 내접하는 정 n 각형이 있다. 원의 중심을 O , 정 n 각형의 한 변을 \overline{AB} 라 하고, 삼각형 OAB 의 넓이를 $f(n)$ 이라고 하자. 이때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(n)$ 을 구하여라.



8조의 답은 1번

1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
2. Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems
3. Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena

이강섭 외(2010). 고등학교 수학 2 익힘책. 서울: 지학사.

다음 극한값을 구하여라.

8조 문제

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

8조의 답은 2번

1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
2. Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems
3. Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena

이강섭 외(2010). 고등학교 수학 2 익힘책. 서울: 지학사.

전체 p 명 중에서 s 명이 소문을 내기 시작하였을 때 t 분 후 소문을 듣게 되는 사람의 수를 m 명이라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

8조 문제

$$m = \frac{p}{1 + (p-s)e^{-0.4t}}$$

이때, 극한값 $\lim_{t \rightarrow \infty} m$ 을 구하여라.

8조의 답은 3번

1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
2. Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems
3. Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena

이강섭 외(2010). 고등학교 수학 2 익힘책. 서울: 지학사.

1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
2. Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems
3. Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena

8조의 위계성에 대한 생각

세 항목들 간의 상하관계에 대해서는 다음과 같이 생각하였다. 2와 같이 다양한 수학적 표현 중에서 알맞은 것을 선택, 적용하고 그것들 사이의 전환을 자유롭게 할 수 있다면, 1과 같이 주어진 문제에서 변하는 양이나 구해야 할 양을 수학적 기호로 표현해야 할 때 가장 효율적이고 때로는 답을 구할 수 있는 유일한 방법으로 그 양을 표현할 수 있다. 하지만 함수나 방정식, 부등식 단원에서 사탕의 개수나 도형의 변의 길이를 x, y 와 같은 문자로 나타내야 하는 단순한 문제와 같이 2와 상관없이 1만을 수행해야 하는 경우도 있다. 이렇듯 1, 2의 관계는 단원이나 문제 등에 따라 달라지고 일방적이지 않으므로 수직적이라기보다는 상호보완적이라 할 수 있다. 중고등학교 수준에서는 물리적, 사회적 사실에 바탕을 둔 공식을 문제에서 제시하고 활용하도록 하는 문제가 많은데, 이때는 1을 어려워하는 학생이라도 제시된 식만 잘 다룰 줄 알면 3에 해당하는 문제는 어렵지 않게 해결할 수 있다. 하지만 일반적으로는 3의 과정을 제대로 이해하고자 할 경우, 1과 2에 대한 총체적인 이해가 있어야 할 것이다.

이강섭 외(2010). 고등학교 수학 2 익힘책. 서울: 지학사.

Principles and Standards for School Mathematics

- Use of **representation** should enable students to
1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
(e.g., both process and product; naïve and conventional representations)
 2. Select, apply, and **translate** among mathematical representations to solve problems
(e.g., multiple representations; strengths and weaknesses)
 3. Use representations to **model** and interpret physical, social, and **mathematical** phenomena
(e.g., **model** = mathematical **representation** and **relationships**; use of variable to represent unknowns; devising representations (such as equations, tables, and graphs) that capture mathematical **relationships**)

References

- 김수환, 박영희, 김진호, 윤오영, 김용준, 김경현, 최형근, 정원진, 이향수, 이성원, 이희언, 이명균, 송미현, 이재근(2012). 기하와 벡터. 서울: 교학사.
- 김수환, 박영희, 김진호, 윤오영, 김용준, 김경현, 최형근, 정원진, 이향수, 이성원, 이희언, 이명균, 송미현, 이재근(2012). 기하와 벡터 익힘책. 서울: 교학사.
- 수경 출판부(2012). 자이스토리 수학 1 B형 1000제. 수경출판사.
- 이강섭, 왕규채, 송교식, 양인웅(2010). 고등학교 수학 2 익힘책. 서울: 지학사.
- 홍범준, 김수영, 김의석, 김형정, 김형균(2011). 썬 수학 2. 서울: 좋은책 신사고.
- 황석근, 임석훈, 김익표, 강승구, 김갑철, 김정석, 박진숙, 배정득, 송영복, 안태종, 윤정호, 장창근, 최정현(2010). 기하와 벡터. 서울: 교학사.
- NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.