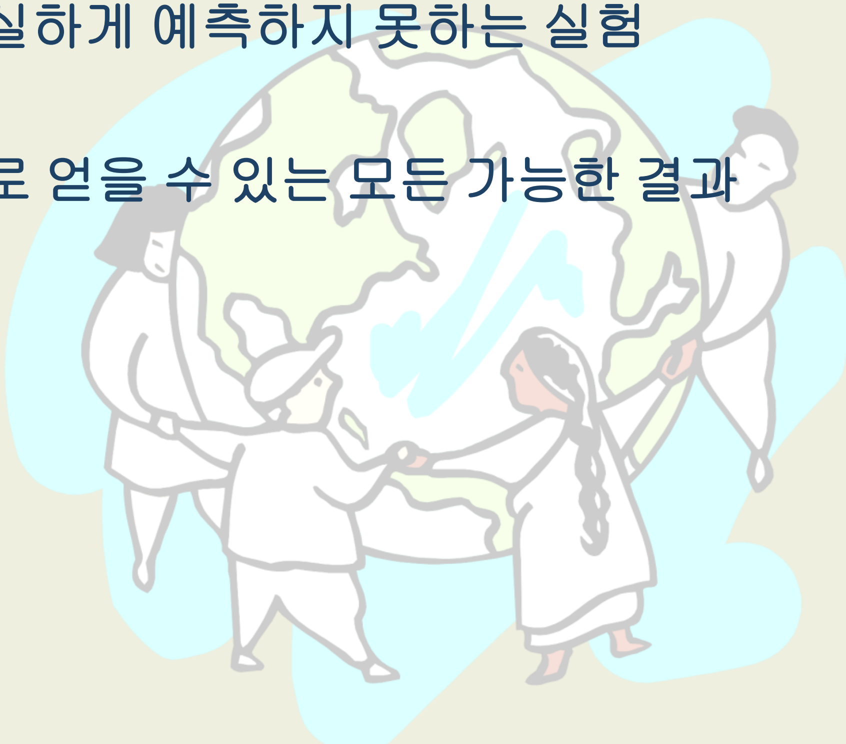
제 4장

확률이론

고려대학교 경영대학 박 광태

확률실험과 표본공간

- 확률실험과 표본공간
  - 확률실험 : 사전에 실험(유사한 조건하에서 반복적으로 자료를 수집하는 과정)의 결과를 확실하게 예측하지 못하는 실험
  - 표본공간 : 확률실험의 결과로 얻을 수 있는 모든 가능한 결과치의 집합



확률실험과 표본공간

- 예제 4-1(p.74)

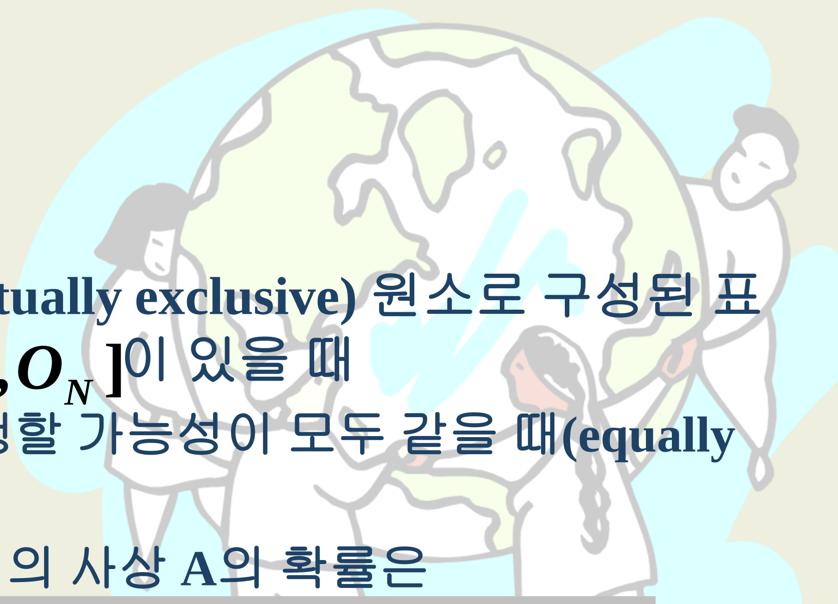
예제 4-1

실 험	표본공간
주사위던지기(주사위를 던지고 매번 던진 주사위의 결과를 기록하는 과정)	$S_1 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
월간 매출액의 집계	(만일 월간 매출액 X가 최소 0원에서 최대 100만원 사이의 정수라면) $S_2 = \{x \mid 0 \le x \le 100\text{만},\ \text{정수}\}$
품질검사(출하되는 완제품을 검사하여 각 제품의 상태를 양호 또는 불량으로 기록)	$S_3 = \{\text{양호},\ \text{불량}\}$
전구의 수명 측정	$S_4 = \{x \mid 0 \le x \le 10{,}000\}$

위 표에서 처음 세 개의 실험은 유한표본공간을 구성하고 마지막 실험은 무한표본공간을 구성함을 알 수 있다.

확률의 정의 (Probability)

- 확률의 정의 (Probability)
  - 사상이 발생할 가능성을 나타내는 **0**과 **1**사이의 수
- 객관적 확률개념
  - 고전적 확률개념
    - N개의 상호배타적인(**mutually exclusive**) 원소로 구성된 표본공간 $S=[O_1, O_2, \cdots, O_N]$이 있을 때
    - 그리고 각각의 원소가 발생할 가능성이 모두 같을 때(**equally likely**),
    - m개의 원소로 구성된 임의의 사상 A의 확률은

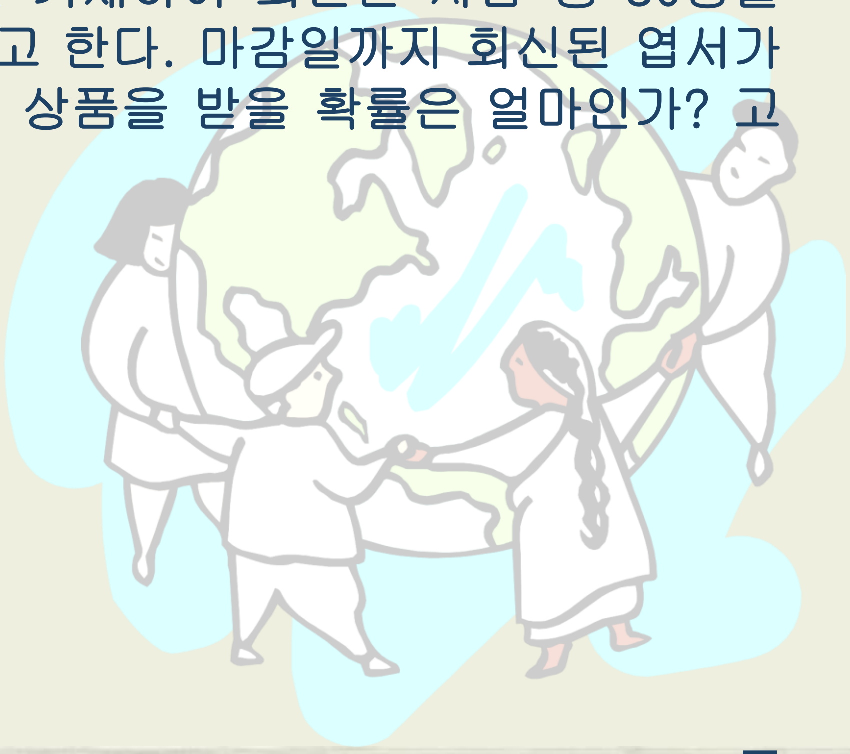


$$P(A)=\frac{m}{N}=\frac{\text{사상 A의 원소의 개수}}{\text{표본공간의 원소의 개수}}$$

확률의 정의 (Probability)

- 예제 4-5(p.78)

시티콤 기획㈜은 송부된 우편엽서를 기재하여 회신한 사람 중 50명을 무작위로 추첨하여 상품을 증정한다고 한다. 마감일까지 회신된 엽서가 10,000장일 때, 엽서를 보낸 사람이 상품을 받을 확률은 얼마인가? 고전적 확률개념에 의하여 구하시오.



확률의 정의 (Probability)

- 상대도수적 확률개념
  - 실험을 n회 장기적으로 반복 시행할 때 특정 사상 A가 m회 발생하였다면,
  - 사상 A의 확률은 상대도수의 극한치인

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{N}$$

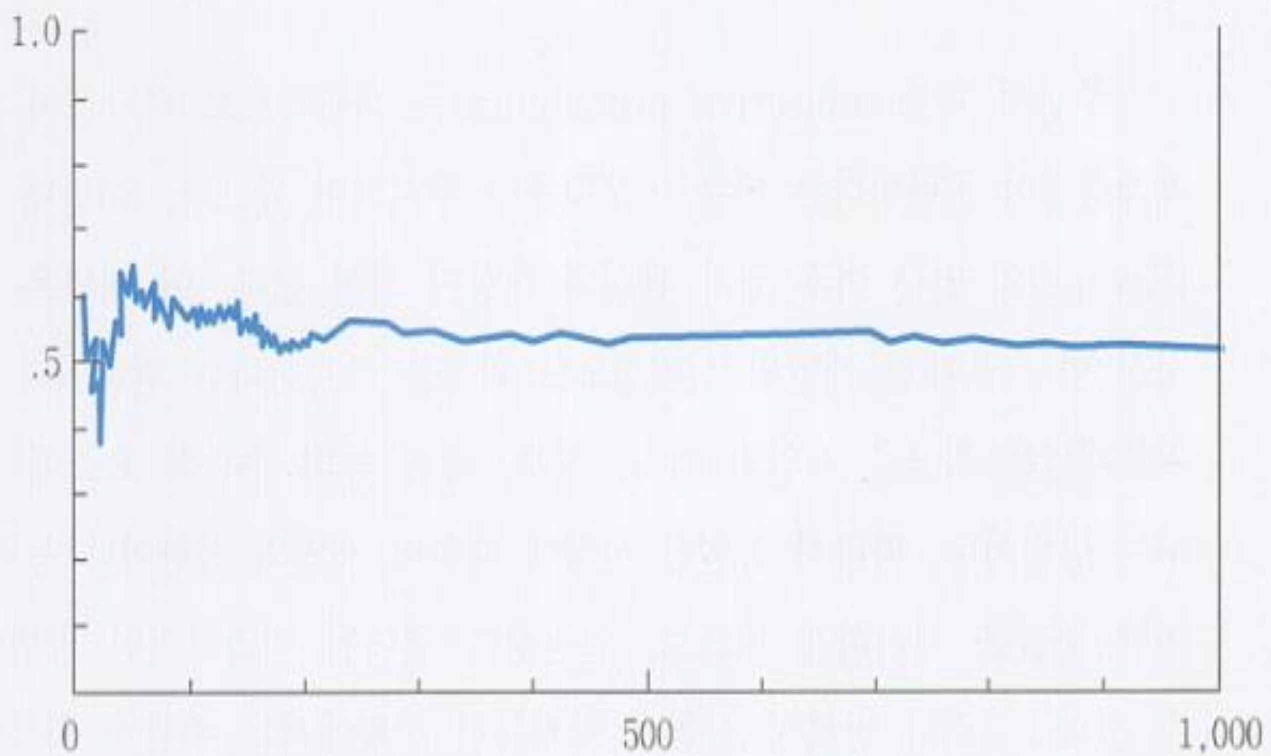
로 정의됨

- 주관적 확률개념
  - 확률을 개인의 지식, 정보, 경험 등의 주관적 요소에 의하여 측정하는 방법

확률의 정의 (Probability)

- 그림 4-2(p.79)

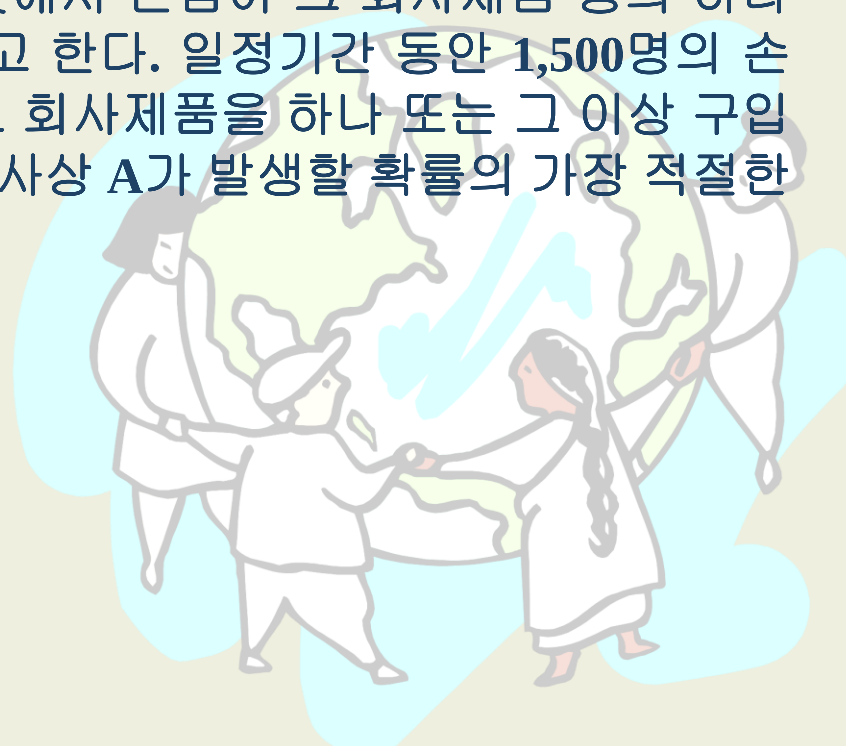
그림 4-2 Kerrick의 동전던지기 실험



확률의 정의 (Probability)

- 예제 4-6(p.79)

한 음료수 제조업체는 특정 슈퍼마켓에서 손님이 그 회사제품 중의 하나를 구입(사상 A)할 확률을 측정하려고 한다. 일정기간 동안 1,500명의 손님을 관찰한 결과가 그 중 500명이 그 회사제품을 하나 또는 그 이상 구입하였다. 이러한 정보를 기초로 할 때, 사상 A가 발생할 확률의 가장 적절한 수치는 무엇인가?



확률의 기본법칙

- 확률의 기본법칙

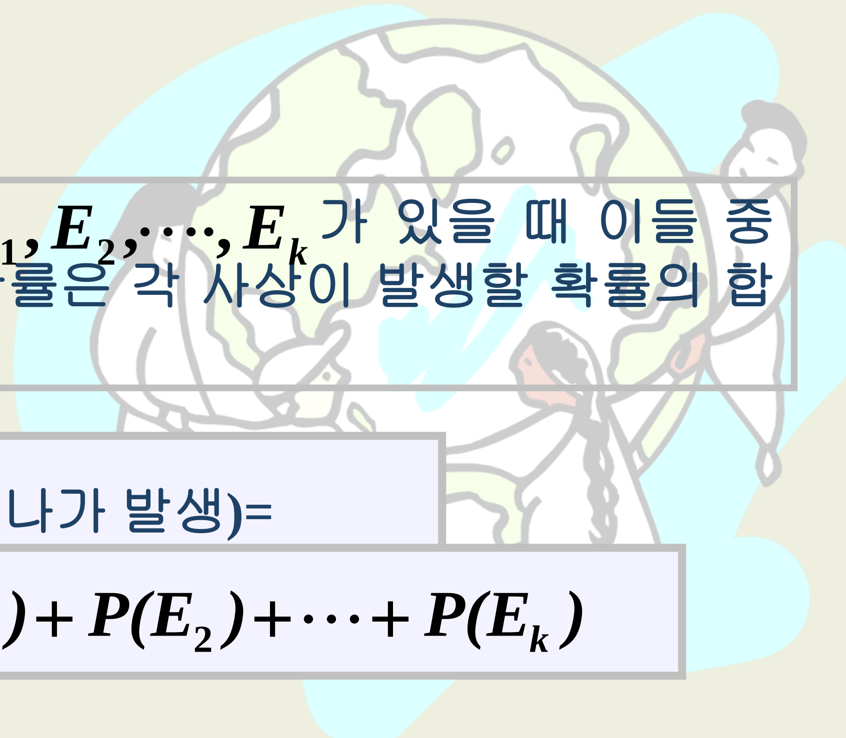
$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(S) = 1, P(\varnothing) = 0$$

상호배타적인 K개의 사상 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 가 있을 때 이들 중 어느 하나의 사상이 발생할 확률은 각 사상이 발생할 확률의 합과 같다

$P(E_1, E_2, \cdots, E_k$ 중의 하나가 발생)=

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$$



확률의 기본법칙

- 예제 4-7(pp.81-82)

예제 4-7

주사위 2개를 동시에 던지는 실험에서 사상 A, B, C를

A : 두 주사위의 합이 9 이상인 사건
B : 첫 번째 주사위가 5가 나오는 사건
C : 두 주사위의 곱이 2인 사건

이라고 할 때, 사상 A, B, C는

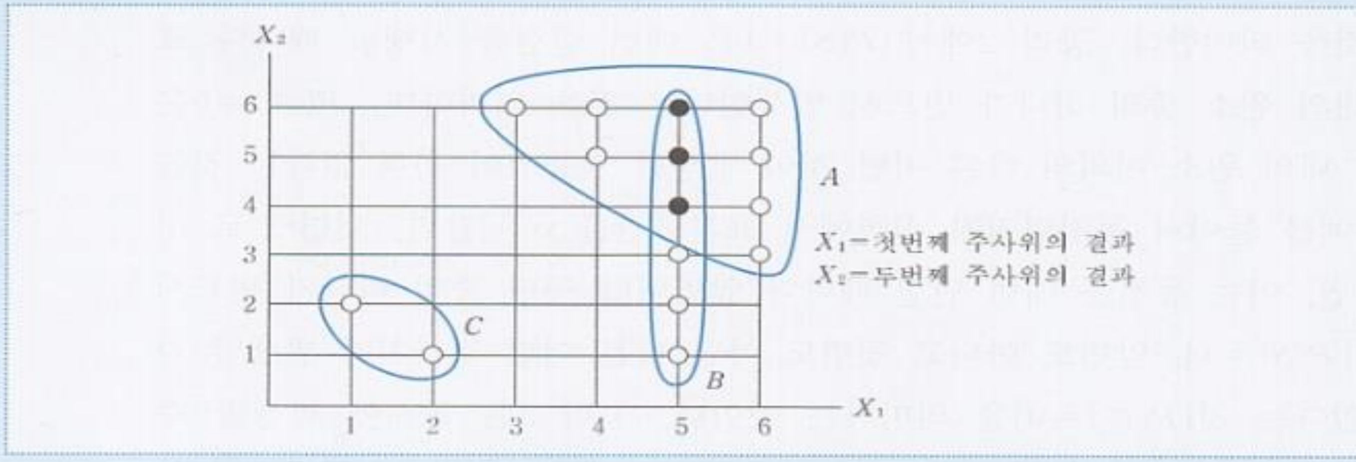
$$A=\{(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 3),(6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$$
$$B=\{(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\}$$
$$C=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$$

이 된다. 여기서 괄호 안의 첫 번째 숫자는 첫 번째 주사위의 결과를, 두 번째 숫자는 두 번째 주사위의 결과를 나타내고 있다. 주사위의 각 숫자가 나올 확률이 동일하다고 할 때, 각 사상의 확률은 그림 4-3으로부터

$$P(A)=\frac{10}{36},\quad P(B)=\frac{6}{36},\quad P(C)=\frac{2}{36}$$

가 됨을 알 수 있다.

그림 4-3 주사위 2개 던지기 실험의 표본공간



세 개의 사상 A, B, C에서 $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$이므로 사상 A와 C, B와 C는 상호배타적이나, $A\cap B=\{(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\}$이므로 사상 A와 B는 상호배타적이 아니다. 따라서

$$P(A\cap C)=0$$

$$P(B\cap C)=0$$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{36}$$

$$P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\frac{12}{36}$$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{8}{36}$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P\{(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4)\\&\qquad (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 3),\ (6,4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}\\&=\frac{13}{36}\end{aligned}$$

확률법칙

- 확률법칙

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

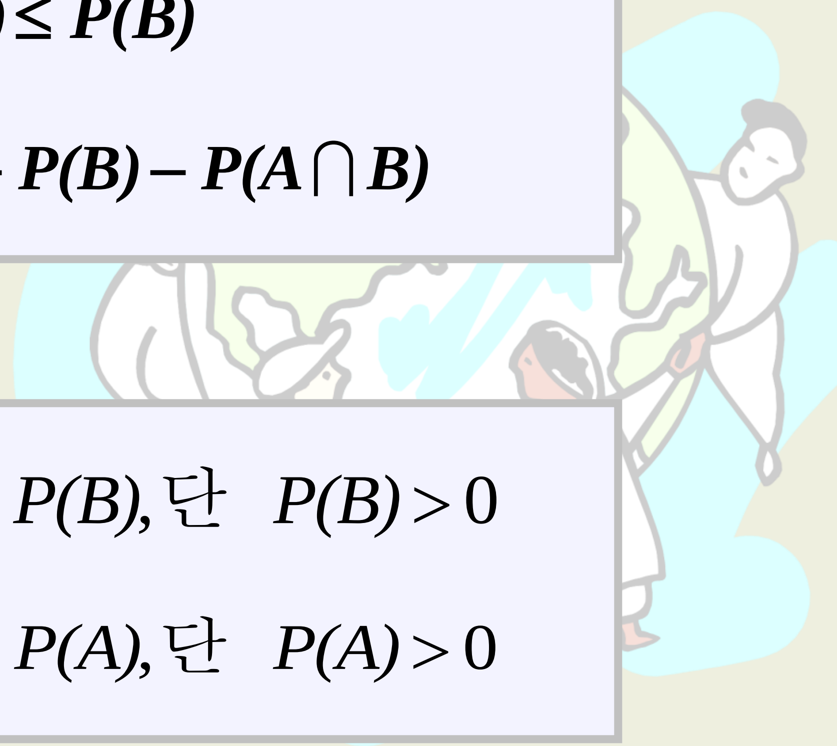
$A \subset B$ 이면 $P(A) \le P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- 조건부 확률

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$, 단 $P(B) > 0$

$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$, 단 $P(A) > 0$



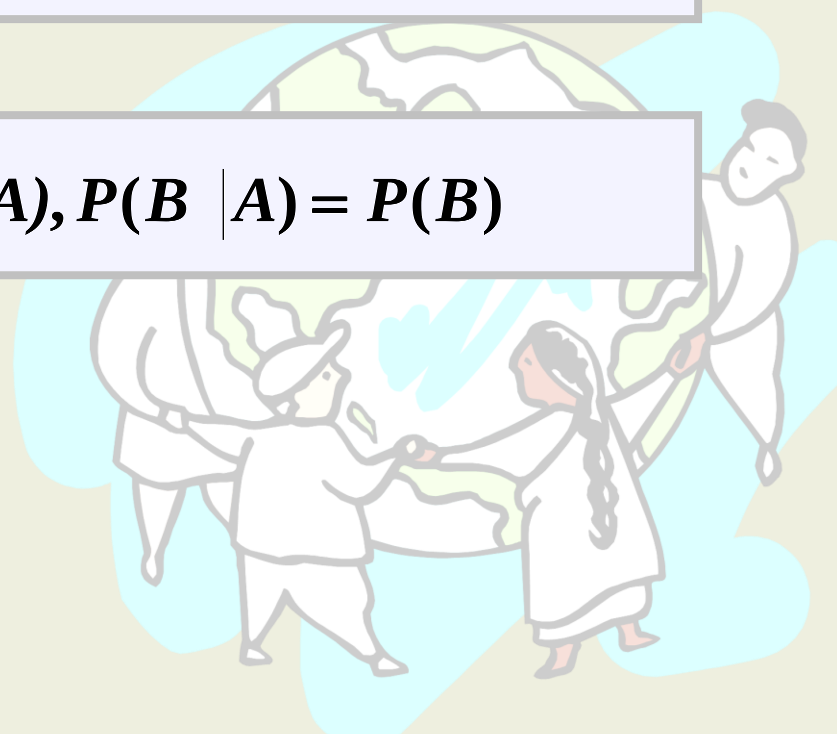
확률법칙

- 곱셈의 일반법칙

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) - P(B \mid A)P(A)$$

- 독립성

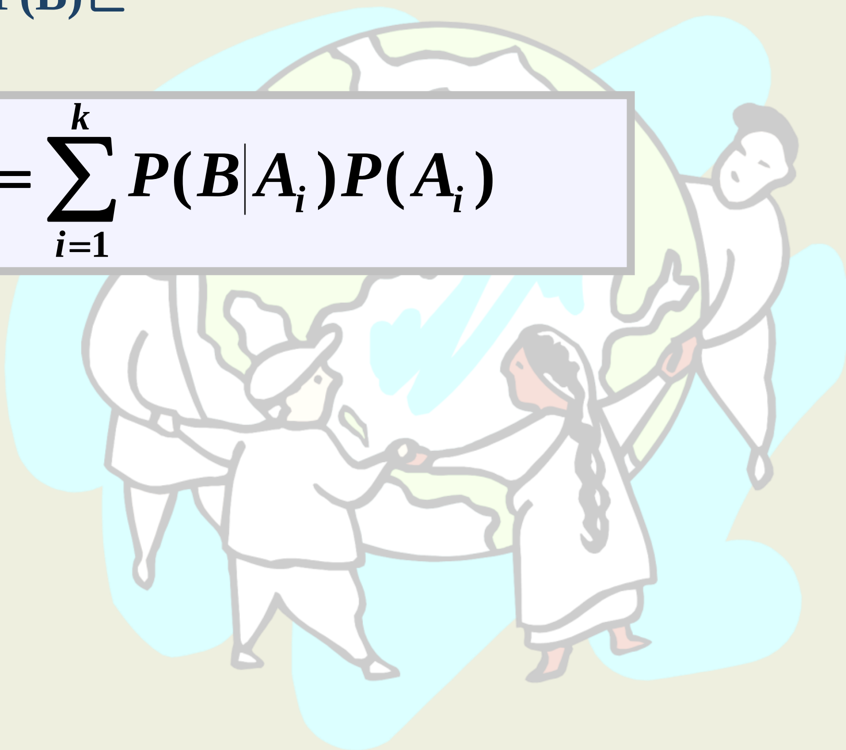
$$P(A \mid B) = P(A), P(B \mid A) = P(B)$$



확률법칙

- 곱셈의 일반법칙
  - 표본공간 S가 상호 배타적인 사상 $A_1, A_2, \cdots, A_k$에 의하여 분할되어 있을 때, 임의의 사상B의 확률 P(B)는

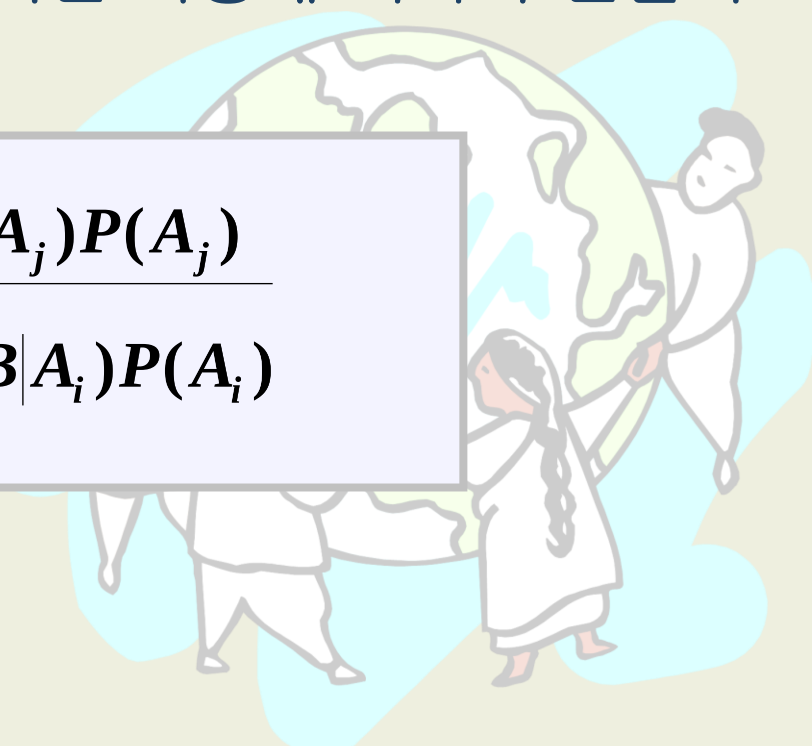
$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)$$



베이스 정리 (Bayes Theorem)

- 베이스 정리(Bayes Theorem)
  - 표본공간 S가 상호배타적인 사상에 의하여 분할되어 있을 때,

$$P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k}P(B|A_i)P(A_i)}$$



베이스 정리 (Bayes Theorem)

- 예제 4-10(p.90)

예제 4-10

예제 9에서 볼 베어링 재고품 중에 불량품이 하나 관찰되었다(사상 B의 발생)고 하자. 이 불량품이 병이 생산한 볼 베어링일 확률은 얼마인가?

예제 9) 성창기업은 장난감을 제조하는 중소업체이다. 이 기업은 세 개의 다른 공급업체 갑, 을, 병으로부터 볼 베아링을 조달하여 장난감의 부속품으로 사용하고 있다. 구입하는 볼 베아링 중 50%는 갑으로부터, 30%는 을로부터 , 그리고 나머지 20%는 병으로부터 온다. 과거의 경험으로 볼 때, 이 세 공급자의 품질관리 상태는 약간씩 차이가 있는데, 갑, 을, 병 세 공급업체가 생산하는 볼 베아링의 불량률은 각각 2%, 3%, 4%로 알려져 있다.

베이스 정리 (Bayes Theorem)

- 예제 4-11(pp.90-91)

예제 4-11

하나은행은 대출원리금 상환능력을 정확히 측정하기 위하여 새로운 시스템을 도입하였다. 과거 20년간 신용대출고객의 데이터를 분석한 결과 신용불량자가 0.005라는 것을 알게 되었다. 만약 신용대출 거래처 중 신용불량자가 되면 시스템상 98%는 부도가 나서 대손이 발생되나 2%는 정상적으로 대출원리금 회수가 가능하다. 그러나 신용대출 거래처가 신용불량자가 되지 않는다면 시스템상 99%는 대출원리금 회수가 가능하며 1%는 대출원리금 회수가 불가능한 것으로 나타났다.

이에 대하여 신용대출 거래처에 대한 시스템 분석결과 대손이 발생하였다고 할 때 이 거래처가 실제로 신용불량자일 확률은 얼마인가?

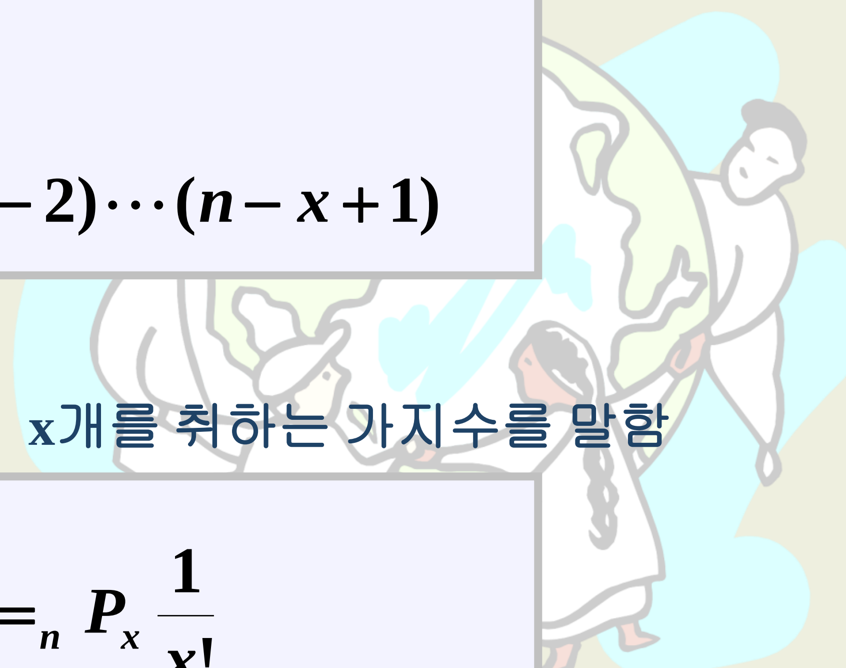
베이스 정리 (Bayes Theorem)

- 예제 4-11(계속)

순열과 조합

- 순열
  - 순열이란 n개의 대상물 중에서 x개를 임의로 선출해서 순서대로 나열하는 방법의 가지 수를 말함

$$ {}_{n}P_{x} = \frac{n!}{(n-x)!} $$
$$ = n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1) $$



- 조합
  - 조합이란 n개의 대상물에서 x개를 취하는 가지수를 말함

$$ {}_{n}C_{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} = {}_{n}P_{x}\frac{1}{x!} $$

순열과 조합

- 예제 4-14(pp.94-95)

예제 4-14

25명으로 구성된 어느 단체에서 3명을 선출하여 회장, 부회장 그리고 총무로 임명하는 경우의 수는 모두 몇 가지인가?

순열과 조합

- 예제 4-15(p.95)

예제 4-15

200명의 학생이 통계학을 수강하고 있다고 하자. 이 학생들 중에서 적어도 2명 이상의 생일이 같을 확률은 얼마인가? 단, 1년은 365일로 한다.

순열과 조합

- 예제 4-17(p.96)

예제 4-17

남학생 30명, 여학생 15명으로 구성된 학급에서 10명을 임의로 추출하였을 때, 이 중 3명이 여학생일 확률 P는 얼마인가?