



NCTM Process Analysis II (Problem Solving & Reasoning and Proof)

Dr. Dong-Joong Kim
(dongjoongkim@korea.ac.kr)

What does it mean to “do” mathematics?

- ① Problem solving
- ② Reasoning and proof
- ③ Communication
- ④ Connections
- ⑤ Representation

Each group and its choice

- Group 1: Connection
- Group 2: Connection
- Group 3: Reasoning and proof
- Group 4: Representation
- Group 5: Connection
- Group 6: Problem solving
- Group 7: Connection
- Group 8: Representation
- Group 9: Representation
- Group 10: Problem solving

Principles and Standards for School Mathematics

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Connections should be made in the mathematics classroom to help students

1. Recognize and use connections among mathematical ideas
(e.g., connecting ideas in algebra and geometry; new and old ideas)
2. Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to **produce a coherent whole**
(e.g., the same mathematical structure in seemingly different settings)
3. Recognize and **apply** mathematics **in contexts outside of mathematics**
(e.g., other subjects areas and disciplines such as science, the social sciences, medicine, and commerce)

Principles and Standards for School Mathematics

- Use of **representation** should enable students to
1. Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas
(e.g., both process and product; naïve and conventional representations)
 2. Select, apply, and **translate** among mathematical representations to solve problems
(e.g., multiple representations; strengths and weaknesses)
 3. Use representations to **model** and interpret physical, social, and **mathematical** phenomena
(e.g., **model** = mathematical **representation** and **relationships**; use of variable to represent unknowns; devising representations (such as equations, tables, and graphs) that capture mathematical **relationships**)

Principles and Standards for School Mathematics

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

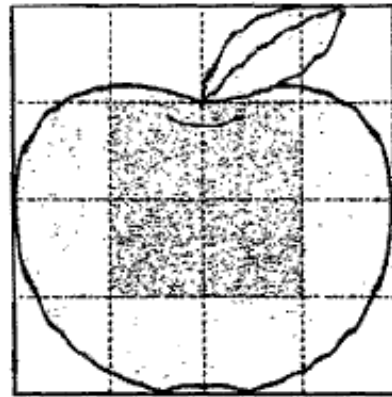
Problem solving should enable all students

1. Build new mathematical knowledge through problem solving
2. Solve problems that arise in mathematics and in other contexts
3. Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems
4. Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

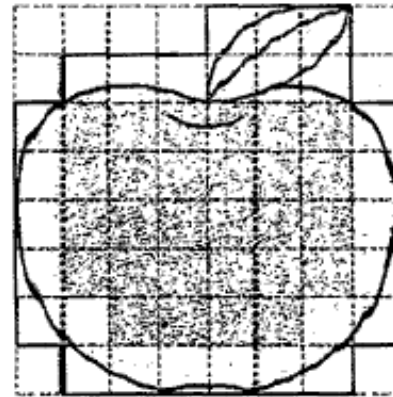
(Meta-cognition)

지현이는 사과 모양을 수학기 위해 3개의 십자수 밑그림을 그렸다. 아래 도안에서 사과 안에 완전히 포함되는 정사각형의 개수를 세어서 구한 값을 m , 사과의 내부와 경계선이 지나는 정사각형의 개수를 세어서 구한 값을 M 이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

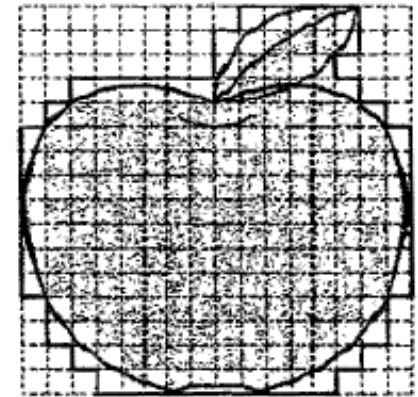
6조 문제



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

1. [그림 1]은 십자수의 망의 눈금 간격을 1 cm로 한 것이고, [그림 2], [그림 3]은 눈금 간격을 각각 $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{4}$ cm로 한 것이다. 각 그림에서 $M-m$ 의 값을 구하여 보자.

2. 눈금의 간격을 점점 더 작게 한다면, $M-m$ 의 값은 어떻게 되겠는가?

6조의 답은 1번

1. Build new mathematical knowledge through problem solving
2. Solve problems that arise in mathematics and in other contexts
3. Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems
4. Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

6조 문제 곡선 $f(x) = 2x\sqrt{x}$ 의 $x=0$ 에서 $x=1$ 까지의 길이를 구하여라

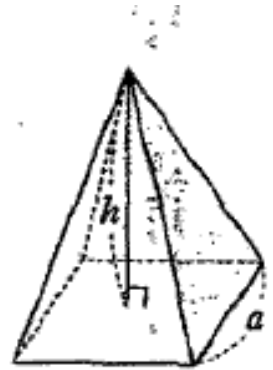
6조의 답은 2번

1. Build new mathematical knowledge through problem solving
2. Solve problems that arise in mathematics and in other contexts
3. Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems
4. Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

우정호 외(2011). 적분과 통계. 서울: 두산동아.

6조 문제

한 변의 길이가 a 인 정사각형을 밑면으로 하고, 높이가 h 인 정사각뿔의 부피를 정적분을 이용하여 구하여라.



6조의 답은 3번

1. Build new mathematical knowledge through problem solving
2. Solve problems that arise in mathematics and in other contexts
3. Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems
4. Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

우정호 외(2011). 적분과 통계. 서울: 두산동아.

태호와 민지는 $\int_0^1 (x+1)^6 dx$ 를 구하기 위해 $x+1$ 을 t 로 치환하여 각각 다음과 같이 해결하였다.



태호

$$\int_0^1 t^6 dt = \left[\frac{1}{7} t^7 \right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

$$\int_1^2 t^6 dt = \left[\frac{1}{7} t^7 \right]_1^2 = \frac{2^7 - 1}{7}$$

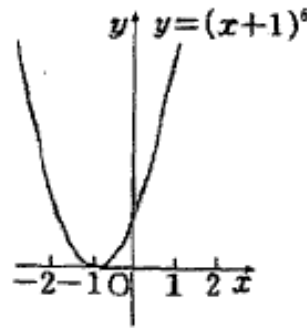


민지

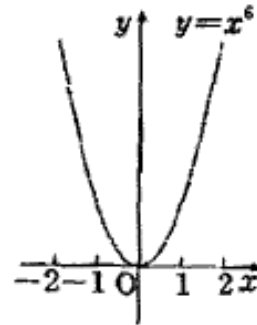
6조 문제

다음 그래프를 이용하여 정적분 ①~③의 의미를 각각 설명하고, 누구의 풀이가 맞는지 이야기하여 보자.

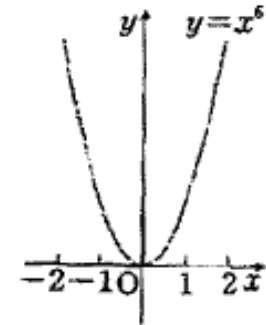
① $\int_0^1 (x+1)^6 dx$



② $\int_0^1 t^6 dt$



③ $\int_1^2 t^6 dt$



6조의 답은 4번

1. Build new mathematical knowledge through problem solving
2. Solve problems that arise in mathematics and in other contexts
3. Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems
4. Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

10조 문제

다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

10조의 답은 3번

1. Build new mathematical knowledge through problem solving
2. Solve problems that arise in mathematics and in other contexts
3. Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems
4. Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

우정호 외(2010). 고등학교 수학 2 익힘책. 서울: 두산동아.

Principles and Standards for School Mathematics

Problem solving should enable all students

1. **Build new** mathematical knowledge through **problem solving** (e.g., extending?; problem vs. exercise)
2. Solve problems that **arise** in mathematics and in other contexts (e.g., worthwhile in their worlds and experiences?; **arise is neither apply nor model**)
3. Apply and **adapt** a variety of appropriate strategies to solve problems (categorize and compare **different strategies**)
4. Monitor and **reflect** on the process of mathematical problem solving (monitor and **adjust** their strategies) (**Meta-cognition**)



Hierarchy

Hierarch 1 (Group 6)

1

Build new mathematical knowledge through problem solving.

문제해결을 통해 새로운 수학적 지식을 습득한다.



2

Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems.

문제를 해결하기 위해 다양한 적절한 전략을 적용하고 그 문항에 맞추어 적용시킨다.



3

Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving.

수학적 문제해결의 과정을 관찰하고 반성한다.



4

Solve problems that arise in mathematics and in other contexts.

수학과 다른 맥락에서 발생하는 문제를 해결한다.

Hierarch 2 (Group 10)

1

Build new mathematical knowledge through problem solving

문제 해결을 통해 새로운 수학적 지식을 정립하라.



2

Solve problems that arise in mathematics and in other contexts

수학과 다른 과목의 문제를 풀어보라.



3

Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems

문제 해결을 위해 여러 적합한 전략들을 적용하고 채택하라.



4

Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

문제 해결의 과정을 검토하고 반영하라.

Principles and Standards for School Mathematics

Through emphasis on **reasoning and proof** in the classroom, all students will

1. Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
2. Make and investigate mathematical conjectures
3. Develop and evaluate mathematical arguments and proofs
4. Select and use various types of reasoning and methods of proof

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

3조 문제

일반항이 $a_n = 3n + 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이 되는지 말하고, 그 이유를 이야기해 보아라.

3조의 답은 1번

1. Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
2. Make and investigate mathematical conjectures
3. Develop and evaluate mathematical arguments and proofs
4. Select and use various types of reasoning and methods of proof

이강섭 외(2010). 고등학교 수학 1. 서울: 지학사.

도미노 이론은 18세기 이탈리아에서 시작된 도미노 놀이에서 유래했다. 도미노 놀이는 상아로 만든 도미노 조각들을 일렬로 세워 놓고 첫 번째 도미노 조각을 넘어뜨려서 모든 도미노 조각들을 차례대로 넘어뜨리는 놀이이다. 도미노 놀이와 같이 하나가 쓰러지면 나머지가 차례대로 쓰러지는 현상을 도미노 현상이라 하는데, 명제의 증명법인 수학적 귀납법은 도미노 현상과 유사하다.

3조 문제

민재는 가로 길이 2 cm, 세로 길이 5 cm인 도미노 조각들을 가지고 이웃한 두 조각 사이의 거리가 일정하도록 일렬로 세워 도미노 놀이를 하려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

1 첫 번째 도미노 조각을 넘어뜨렸을 때 모든 도미노 조각들이 차례대로 넘어지기 위한 조건을 이야기해 보아라.

2 위 1의 조건을 만족하면 첫 번째 도미노 조각을 넘어뜨리면 모든 도미노 조각들이 넘어진다는 것을 수학적 귀납법의 원리를 이용하여 설명해 보아라.

3조의 답은 2번

1. Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
2. Make and investigate mathematical conjectures
3. Develop and evaluate mathematical arguments and proofs
4. Select and use various types of reasoning and methods of proof

3조 문제

모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3조의 답은 3번

1. Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
2. Make and investigate mathematical conjectures
3. Develop and evaluate mathematical arguments and proofs
4. Select and use various types of reasoning and methods of proof

이강섭 외(2010). 고등학교 수학 1. 서울: 지학사.

1. 수열 $\{a_n\}$ 은 아래와 같은 귀납적 정의를 만족한다. (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 2, \quad a_{r+1} = a_r + n^2 \quad (-)$$

3조 문제

민재와 지희는 아래와 같이 서로 다른 방법으로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구했다. 잘못된 풀이가 누구의 것인지 찾은 후 잘못된 부분을 바르게 고쳐보자.

<민재의 풀이>

$n = 1, 2, 3, \dots$ 일 때, 식 (-)가 성립하므로

$$a_2 = a_1 + 1^2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

...

$$a_r = a_{r-1} + (n-1)^2$$

양변을 모두 더해주고 정리하면

$$a_r = a_1 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \sum_{k=1}^{r-1} k^2$$

<지희의 풀이>

수열 $\{a_n\}$ 의 제차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 식 (-)에 의하여

$$b_r = a_{r-1} - a_r = n^2$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_r = a_1 + \sum_{k=1}^r b_k = 2 + \sum_{k=1}^r k^2$$

$$= 2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{이다.}$$

3조의 답은 4번 $= 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ 이다.

1. Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
2. Make and investigate mathematical conjectures
3. Develop and evaluate mathematical arguments and proofs
4. Select and use various types of reasoning and methods of proof

Principles and Standards for School Mathematics

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Through emphasis on **reasoning and proof** in the classroom, all students will

1. Recognize reasoning and proof as **fundamental** aspects of mathematics (**Why by evidence?; sources for reasons**)
2. Make and investigate mathematical **conjectures** (=informed guessing; **Is this true always?; what change?; counterexample**)
3. Develop and evaluate mathematical **arguments** and **proofs** (**Why does this work?; extension to general cases**)
4. Select and use **various** types of reasoning and methods of proof (**norms for them; deductive arguments**)

References

- 우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 이정아, 김민경 (2011). 적분과 통계. 서울: 두산동아.
- 우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 최남광, 송은영 (2010). 고등학교 수학 2 익힘책. 서울: 두산동아.
- 이강섭, 왕규채, 송교식, 양인웅(2010). 고등학교 수학 1 익힘책. 서울: 지학사
- 이준열, 최부림, 김동재, 서정인, 전용주, 김홍섭, 장희숙, 조석연, 오승아, 송정(2010). 고등학교 수학 1. 서울: 천재교육
- NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.