





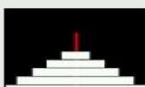



하노이 탑을 이용한 규칙성 탐구

배 성 철

< 하노이탑

앱

-  **하노이탑**
아바드(avad)
★★★★★ 무료
-  **봉실의 하노이탑**
DAOOLDNS
★★★★★ 무료
-  **하노이의탑_ver.창고**
Papercup
★★★★★ 무료
-  **하노이의 타워 디럭스**
Celtic Spear
★★★★★ 무료
-  **Timon's Birthday**
DRV Games
★★★★★ 무료
-  **하노이 타워**
KUADRUS Informatica Ltda
★★★★★ 무료
-  **하노이 타워 탭 탭**
Tiny Caracal
★★★★★ 무료
-  **하노이 타워(hanoi tower)**
Dong Geun Jin
★★★★★ 무료

○ 하노이탑이란?

: 초기 기둥에서 목표 기둥으로 일정한 규칙에 따라 원판을 이동시키는 게임



<http://blog.daum.net/eqpuzzle/83>

2. 하노이 탑의 규칙

: ‘모양이 다른 여러 개의 원판’과 ‘세 개의 기둥’으로 이루어져 있는 탑 모양의 구조물로, 아래서부터 크기 순으로 쌓여 있는 원판을 다음의 규칙에 따라 다른 기둥으로 옮기는 최소 이동횟수에 관심을 갖게 된다.

1. 원판은 한 번에 한 개씩 옮겨야 한다.
2. 작은 원판 위에 큰 원판을 올려놓을 수 없다.

○ 규칙성 탐구 1

1. 각각 원판의 이동 횟수를 찾아보세요.

원판 개수	전체 이동 횟수	각 원판 이동 횟수							
		노랑	주황	빨강	초록	연두	보라	하늘	파랑
1개	1	1							
2개	3	2	1						
3개	7	4	2	1					
4개	15	8	4	2	1				
5개	31	16	8	4	2	1			
6개	63	32	16	8	4	2	1		
7개	127	64	32	16	8	4	2	1	
8개	255	128	64	32	16	8	4	2	1

2. n 개의 원판을 옮기는 최소이동횟수를 a_n 이라 하자. 이 때 일반항 a_n 을 구하고 a_n 과 a_{n+1} 사이의 점화식을 만들어 보세요.

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$a_n = 2^n - 1$$

Q. 하노이탑으로 점화식을 설명해 보세요.

○ 규칙성 탐구 Ⅱ

: 모양이 같은 원판이 여러 개인 경우

1. 모양이 같은 원판이 2개인 경우에 대해 생각해 보고, 각각 원판의 이동 횟수를 찾아보세요.

원판 개수	최소 이동 회수	
	각 1개	각 2개
1개	1	2
2개	3	6
3개	7	14
4개	15	30
5개	31	62
⋮		
n개	$2^n - 1$	$2(2^n - 1)$

2. 크기가 서로 다른 n 개의 원판이 각각 p 개씩, 모두 np 개의 원판을 옮기는 최소횟수를 a_n 이라 하자. 이 때 일반항 a_n 를 구하고, a_n 과 a_{n+1} 사이의 점화식을 만들어 보세요.

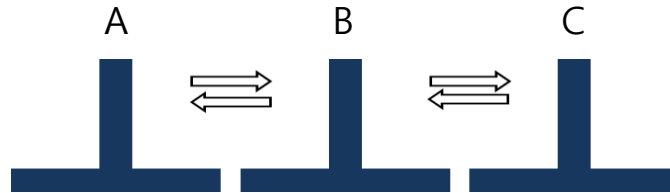
$$a_{n+1} = 2 a_n + p$$

$$a_n = p(2^n - 1)$$

Q. 하노이탑으로 점화식을 설명해 보세요.

○ 규칙성 탐구 III

: 인접 통행 하노이탑



원판 개수	최소 이동 횟수	
	인접 기둥으로 이동	먼 기둥으로 이동
1개	1	2
2개	4	8
3개	13	26
4개	40	80
⋮		
n개	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^n$	$-1 + 3^n$

2. 인접통행 하노이 탑의 인접 기둥으로 이동하는 최소이동횟수를 a_n , 먼 기둥으로 이동하는 최소이동횟수를 b_n 이라 하자.

(1) a_n 과 a_{n+1} 사이의 점화식을 만들어 보세요.

$$a_{n+1} = 3a_n + 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3^n$$

(2) a_n, b_n 사이의 관계식을 찾아보세요.

$$b_n = 2a_n$$

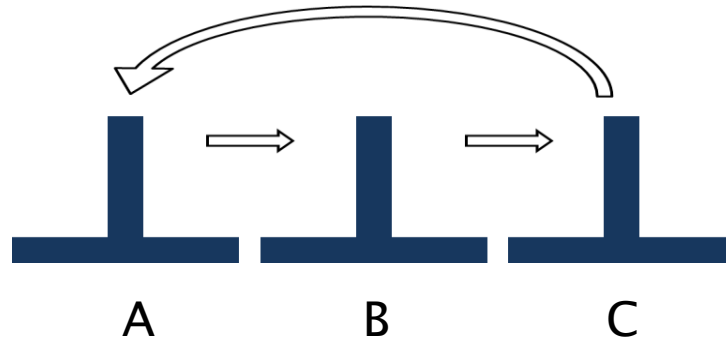
(3) b_n 과 b_{n+1} 사이의 점화식을 만들어 보세요.

$$b_{n+1} = 3b_n + 2$$

Q. 하노이탑으로 점화식을 설명해 보세요.

○ 규칙성 탐구 IV

<일반통행 하노이 탑>



원판 개수	최소 이동 횟수	
	인접 기둥으로 이동	먼 기둥으로 이동
1개	1	2
2개	5	7
3개	15	21
4개	43	59
⋮		

2. 일방통행 하노이 탑의 인접 기둥으로 이동하는 최소이동횟수를 a_n , 먼 기둥으로 이동하는 최소이동횟수를 b_n 이라 하자. a_n 과 b_n 를 사용하여 다양한 점화식을 만들어 보세요.

$$a_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$b_{n+1} = 2b_n + a_n + 2$$

Q. 하노이탑으로 점화식을 설명해 보세요.